L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
Février 2017

Feuille de TD 4
Suites de fonctions

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers f. Que dire de f si toutes les fonctions f_n sont paires ? croissantes ? strictement croissantes ?

Exercice 2. On considère $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ n^2 x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ (1-n^2)x + 2n - n^{-1} & \text{si } x \in [1/n, 2/n] \\ 1/n & \text{si } x \in [2/n, +\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer, sans trop de calcul, que $(f_n \circ f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas simplement vers $f \circ f$.
3. On considère une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans $\mathbb{R}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers une fonction g. On suppose que pour tout n la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que la suite $(g_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $g \circ g$.
4. Montrer que lorsque les fonctions g_n sont uniformément continues alors $(g_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ g$.
5. On considère à présent la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ définie par pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h que l'on déterminera.
2. Montrer que la suite $(h_n \circ h_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $h \circ h$.

Exercice 3. Déterminer la nature de la suite de terme général,

$$I_n = \int_0^1 \frac{n\,\mathrm{e}^{-x} + x^2}{n+x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}.$$

1. Déterminer le domaine D sur lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
2. La convergence est-elle uniforme sur D ? Sur $]-1,1[$? Sur $[a,b]$, avec $-1 < a < b < 1$? Sur $[1,+\infty[$? Sur $[a,+\infty[$, avec $a > 1$?

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'applications définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'applications définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \geqslant 1$, $f_{n+p}(2^n\pi) - f_n(2^n\pi)$. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$u_n(x) = \frac{n\sin(nx)}{1+n^2x^2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$\frac{n}{1+\frac{\pi^2}{4}} \leqslant \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |u_n(x)| \leqslant n$$
et en déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement mais non uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Justifier que l'intégrale impropre
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$
est convergente.
3. Montrer que $0 < I < \frac{\pi}{2}$.
Indication : on pourra montrer que la suite $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ *est alternée.*
4. On pose pour tout $n \geqslant 1$,
$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
Montrer que $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, quelle est sa limite ?

Exercice 8.

1. Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$:
$$\forall x \in I,\ \forall n \geqslant 0, \qquad f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x).$$
On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I et on suppose que f est continue sur I.
   (a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = f_n - f$ et on considère une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans I telle que $\lim_{n\to+\infty} g_n(x_n) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et une sous-suite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ notée $(y_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n(y_n) > \alpha$.
   (b) Montrer qu'il existe $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-suite de $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $z \in I$ tels que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$.
   (c) A l'aide des questions précédentes, montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f.
2. On considère $(P_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par récurrence par :
$$\forall t \in [0,1], \quad P_0(t) = 0, \qquad \forall n \geqslant 1,\ \forall t \in [0,1], \quad P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{t - P_n^2(t)}{2}.$$
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, P_n est un polynôme.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{t}{2} \leqslant P_n(t) \leqslant \sqrt{t}$.
   (c) En déduire que $(P_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers une fonction que l'on déterminera.